

ЭКСПЕРТИЗА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

РЕЕСТР ЭКСПЕРТОВ КАК СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ: МОДЕЛЬ И ПАРАМЕТРЫ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА ЗАЯВОК

П.Б. Мельник, зам. ген. дир. ФГБНУ НИИ РИНКЦЭ, канд. техн. наук, доцент,
pmelnick@extech.ru

В статье в интересах выработки подходов к решению задачи рационального построения и организации работы реестра экспертов для обеспечения высокой эффективности его функционирования при оптимальных затратах в терминах теорий: массового обслуживания, вероятности, систем и системного анализа, дано формальное описание и оценка значений параметров, характеризующих реестр экспертов как систему массового обслуживания в части, касающейся входящего потока заявок на обслуживание.

Ключевые слова: экспертно-аналитические исследования, реестр экспертов, система массового обслуживания, марковский процесс, цепь Маркова, эффективность системы массового обслуживания, входящий поток заявок.

THE EXPERT'S ROSTER AS A QUEUING SYSTEM: THE MODEL AND PARAMETERS OF THE INCOMING FLOW OF REQUESTS

P.B. Melnik, Deputy Director General SRI FRCEC, Doctor of Engineering, Docent,
pmelnick@extech.ru

In the article, in order to develop approaches to solving the problem of rational construction and organization of the expert's roster to ensure high efficiency of its operation at optimum cost in terms of theories: queuing, probability, systems and system analysis, a formal description and evaluation of the values of the parameters characterizing the register of experts as a Queuing system in terms of the incoming flow of service requests is given.

Keywords: expert and analytical research, expert's roster, queuing system, Markov process, Markov chain, queuing system efficiency, incoming flow of requests.

Введение

В силу специфики решаемых задач в части, касающейся основных функций по проведению экспертно-аналитических исследований и экспертиз (далее – ЭАИ), произвольный реестр экспертов (далее – Реестр) [6] может быть интерпретирован как *система массового обслуживания* (далее – СМО). Напомним, что к системам массового обслуживания относят системы, реализующие многократное выполнение однотипных задач [8].

Каждая СМО в зависимости от правил организации работы и своих параметров (таких как характер потока заявок, число каналов обслуживания и их производительность и пр.), обладает определенной эффективностью функционирования (пропускной способностью), выражающейся в ее возможности в той или иной степени обеспечить обслуживание входного потока заявок [4].

Целью данного цикла статей является получение формального описания и оценки значений параметров, характеризующих Реестр как одну из разновидностей сложной СМО, в

интересах выработки подходов к решению задачи рационального построения и организации работы Реестра для обеспечения высокой эффективности его функционирования при оптимальных затратах. При этом под эффективностью Реестра следует понимать его эффективность исключительно как системы по обработке входящего потока заявок. Эффективность Реестра с точки зрения качества содержимого результатов ЭАИ предметом рассмотрения не является. Кроме этого, следует отметить, что в рамках данной статьи будут рассмотрены параметры СМО в части, касающейся только входящего потока заявок на обслуживание.

1. Общие положения

Введем необходимые термины и дадим их определение на основе изложенных в [7].

Система массового обслуживания — математический (абстрактный) объект, содержащий один или несколько *каналов*, обслуживающих *заявки*, поступающие в систему, и *буфер*, в котором находятся заявки, образующие *очередь* и ожидающие обслуживания.

Заявка (требование, запрос) — объект, поступающий в СМО и требующий обслуживания каналом.

Поток заявок — совокупность распределенных во времени событий, заключающихся в появлении заявок на входе СМО.

Канал (обслуживающее устройство) — элемент СМО, функцией которого является обслуживание заявок.

Обслуживание — обработка заявки обслуживающим каналом.

Длительность обслуживания — время задержки заявки на обработку каналом.

Буфер (накопитель) — совокупность мест в очереди для ожидания заявок перед обслуживанием в целом или конкретным каналом.

Размер буфера — количество мест в очереди для ожидания обслуживания.

Очередь заявок — заявки, находящиеся в буфере и ожидающие обслуживания.

Длина очереди — количество заявок, ожидающих обслуживания в буфере.

Дисциплина буферизации — правило занесения поступающих заявок в буфер.

Дисциплина обслуживания — правило выбора заявок из очереди для обслуживания.

Приоритет — преимущественное право заявок одного класса на занесение в буфер или выбор из очереди для обслуживания каналом по отношению к заявкам других классов.

В самом общем виде СМО может быть представлена в виде схемы (рис. 1) [8].

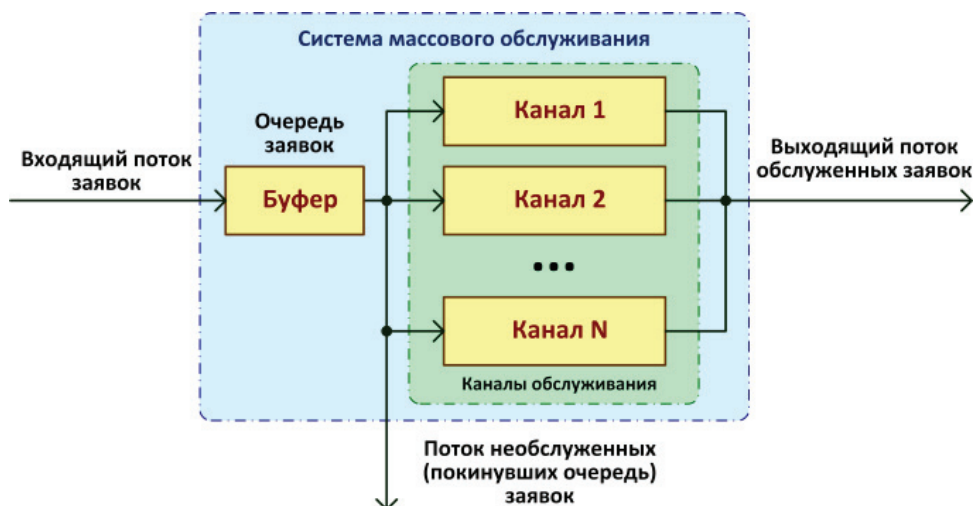


Рис. 1. Общая схема системы массового обслуживания

Из рис. 1 видно, что СМО содержит следующие основные элементы:

- заявки, образующие поток на входе СМО (входящий поток заявок);
- очередь заявок, образующаяся в буфере;
- каналы, обслуживающие заявки из входящего потока (буфера);
- выходящий поток обслуженных заявок;
- выходящий поток необслуженных (покинувших очередь) заявок.

Существующие методы расчета характеристик как самих СМО, так и процесса их функционирования, как правило, предполагают наличие ряда ограничений. Если иное не оговорено особо, то используются следующие предположения:

- заявка, поступившая на вход СМО, может находиться только в двух состояниях:
 - обслуживание (в канале);
 - ожидание обслуживания (в буфере), если все каналы заняты обслуживанием других заявок или недоступны;
- при наличии свободных каналов заявка, поступившая в систему, мгновенно попадает на обслуживание;
- канал в любой произвольный момент времени может быть занят обслуживанием только одной заявки;
- каждая находящаяся в обслуживании заявка обслуживается не более, чем одним каналом;
- после завершения обслуживания каналом какой-либо заявки очередная заявка из очереди мгновенно (т.е. без потерь времени) поступает на обслуживание (другими словами, если в очереди есть хотя бы одна заявка, то канал не простаивает);
- поступление заявок в СМО и длительности их обслуживания не зависят от того, сколько заявок уже находится в системе, или от каких-либо других факторов;
- длительность обслуживания заявок не зависит от скорости (интенсивности) поступления заявок в систему;
- заявка на выходе СМО также может находиться только в двух состояниях:
 - заявка была обслужена;
 - заявка, в силу тех или иных причин, не была обслужена.

2. Классификация СМО

СМО отличаются достаточным разнообразием и могут быть классифицированы по ряду признаков [8, 7].

По количеству каналов СМО подразделяют на *одноканальные* (когда имеется один канал обслуживания) и *многоканальные*, точнее *N-канальные* (количество каналов $N \geq 2$).

Многоканальные СМО могут состоять из *однородных*, либо из *разнородных* каналов, в зависимости от типа заявок, поступающих на обслуживание. Если заявки на входе СМО разнородны, т.е. процедуры их обслуживания различаются по приоритету, длительности или количеству необходимых этапов, то и каналы, выделяемые СМО на их обслуживание, также в свою очередь считаются разнородными.

СМО считается *однофазной*, если количество этапов обслуживания заявки $K = 1$, и все ее каналы выполняют одну и ту же операцию обслуживания. Если же обслуживание состоит из нескольких ($K \geq 2$) последовательных этапов (фаз), т.е. каналы обслуживания последовательно выполняют различные операции обслуживания, то такая СМО называется *многофазной*.

По дисциплине обслуживания СМО подразделяют на три класса.

СМО с отказами. Если заявка поступает на вход СМО в момент, когда все каналы заняты, то она получает «отказ» и покидает СМО. Чтобы эта заявка все же была обслужена, она должна снова поступить на вход СМО и будет рассматриваться при этом как новая, поступившая впервые заявка.

СМО с ожиданием (неограниченным ожиданием или очередью). Заявка, поступившая в момент занятости всех каналов, становится в очередь и ожидает освобождения канала, который рано или поздно примет ее к обслуживанию. Потерь (отказов) заявок нет.

СМО смешанного типа (с ограниченным ожиданием). На пребывание заявки в очереди накладываются различные ограничения.

Ограничение на длину очереди задает максимально возможное количество заявок, которые одновременно могут находиться в очереди.

Ограничение по времени пребывания заявки в очереди определяет интервал времени, по истечению которого заявка выходит из очереди и покидает систему.

Ограничение по времени пребывания заявки в системе может касаться суммарного времени нахождения заявки в очереди и на обслуживании. В этом случае заявка покидает систему независимо от ее состояния (нахождения).

СМО с ожиданием и смешанного типа могут различаться по схеме обслуживания заявок из очереди. Обслуживание может быть *упорядоченным*, когда заявки из очереди обслуживаются в порядке их поступления в систему, и *неупорядоченным*, при котором заявки из очереди обслуживаются в случайном порядке. Часто применяется обслуживание *с приоритетом*, когда некоторые заявки из очереди считаются приоритетными и поэтому обслуживаются в первую очередь.

По ограничению потока заявок СМО делятся на замкнутые и открытые. Если поток заявок ограничен и заявки, покинувшие систему, могут в нее возвращаться, то СМО является замкнутой, в противном случае — открытой. В открытой СМО характеристики входящего потока заявок не зависят от того, в каком состоянии находится СМО (сколько каналов занято), а в замкнутой зависят.

Следует отдельно отметить, что одним из самых важных классификационных признаков СМО являются также характеристики входящего потока заявок (такие как тип потока, его статистические параметры, закон распределения, интенсивность и пр.). Их специфика будет рассмотрена ниже.

Не менее важными представляются и аналогичные характеристики выходящего потока заявок (т.н. поток обслуживаний или восстановлений). Типы и параметры выходящих потоков будут предметом рассмотрения в последующих публикациях в рамках предлагаемого цикла статей.

3. Реестр и его место в классификации СМО

Анализ рис. 1 показывает, что Реестр действительно обладает всеми необходимыми элементами СМО. Для наглядности сопоставим соответствующие признаки обеих систем между собой в виде таблицы.

Таблица 1

№ п/п	Элемент СМО	Аналог в Реестре
1	Входящий поток заявок	Поток заявок на проведение ЭАИ
2	Очередь (буфер)	Ожидание подбора экспертов (групп, пулов)
3	Каналы обслуживания	Экспертные пулы и группы, отдельные эксперты
4	Выходящий поток обслуженных заявок	Поток отчетов, экспертных заключений
5	Поток необслуженных заявок	Поток отклоненных заявок на проведение ЭАИ

С точки зрения рассмотренных выше признаков Реестр в первом приближении можно отнести к ***многоканальным разнородным многофазным замкнутым СМО с ограниченным ожиданием и смешанными приоритетами***.

Действительно, количество каналов, которыми располагает Реестром в произвольный момент времени для обработки заявок на проведение ЭАИ, практически всегда больше единицы, за исключением крайне редких случаев. Более того, Реестр изначально разрабатывал-

ся именно как многоканальная система параллельной обработки потока однотипных (т.е. по одному шаблону или экспертной карте) запросов на проведение ЭАИ.

Однако, «однотипных» в данном случае вовсе не означает — «однородных» в терминах СМО, поскольку даже однотипные по шаблону ЭАИ могут выполняться (обслуживаться) за различные промежутки времени.

Из самых общих соображений понятно, что *время обслуживания* каналом заявок одного типа — $T_{(об.)}$ является непрерывной случайной величиной (обычно заключенной в некотором интервале $T_{(об. min)} \leq T_{(об.)} \leq T_{(об. max)}$). Однако, в предельном случае, при условии абсолютной однородности поступающих заявок и каналов, время обслуживания может рассматриваться как постоянная величина ($T_{(об.)} = \text{const}$).

При этом, как уже было указано ранее, полагается, что каждый канал одновременно может обслуживать не более одной заявки, а также (если это не оговорено специально) — каждая находящаяся в обслуживании заявка обслуживается не более, чем одним каналом.

Однако, шаблоны заявок в общем случае могут предусматривать различное количество этапов или фаз обслуживания (выполнения ЭАИ), что позволяет говорить о Реестре, как о *многофазной* СМО.

Примером такого типа заявок может послужить запрос на выполнение сложного ЭАИ (экспертизы), подразумевающего на первом этапе подготовку предварительных материалов (экспертных заключений) группой экспертов из состава Реестра, а на втором — формирование окончательного отчета о проведенном ЭАИ (итогового обобщенного экспертного заключения) специально отобранными для этих целей экспертами-аналитиками.

В случае экспертизы таких сложных проектов, требующих одновременного участия нескольких специалистов одной или разных специальностей, в интересах использования единого методического подхода целесообразно выполнить декомпозицию сложного проекта на отдельные задачи, каждая из которых будет обслуживаться только одним каналом (экспертом). Таким образом, можно уйти от многофазной модели СМО к однофазной за счет увеличения количества каналов обслуживания и разделения между ними сложной заявки, что позволяет существенно упростить модель СМО и расчеты ее характеристик и эффективности в целом.

В связи с этим введем дополнительные понятия. Назовем *субпоток* отдельный входящий поток заявок, как правило, связанный с определенным источником и обладающий параметрами (характеристиками), существенно отличающимися от других потоков заявок на входе произвольной СМО. Под *пулом каналов* будем понимать совокупность каналов, выделяемых для обслуживания отдельного потока (субпотока) заявок, а под *группой каналов* — совокупность каналов, выделяемых для обслуживания конкретной сложной заявки после ее декомпозиции.

Сложность Реестра как СМО определяется еще и тем фактом, что сами каналы на обслуживание заявок могут формироваться и выделяться динамически, то есть в процессе функционирования Реестра может меняться не только их количество, но и качественные характеристики (количество фаз в канале, время обслуживания заявки каналом и пр.).

4. Модели потока заявок на входе Реестра

Входящий поток заявок представляет собой *поток событий*, под которым, в теории массового обслуживания [8] понимается последовательность событий, наступающих (следующих) одно за другим в некоторые произвольные (детерминированные и/или случайные) моменты времени.

Исходя из самых общих предположений, поток заявок на проведение ЭАИ на входе Реестра будет представлять собой суперпозицию нескольких образующих его случайных потоков (субпотоков), обладающих, как правило, различными статистическими характеристиками и разным временем своего существования. Таким образом, в рамках произвольного периода наблюдения (временного интервала) на вход Реестра могут одновременно поступать заявки из различных субпотоков.

Специфика задач, решаемых Реестром, позволяет полагать, что отдельный субпоток на его входе может быть отнесен к одному из основных типов, рассмотренных ниже. В качестве примеров приведем соответствующие потоки заявок на входе Федерального реестра экспертов научно-технической сферы (далее – ФРЭ). При этом за стандартный период наблюдения

$$T_H = [t_{\text{нпн}}, t_{\text{опн}}],$$

где $t_{\text{нпн}}$ – начало периода наблюдения, а $t_{\text{опн}}$ – окончание периода наблюдения, целесообразно принять один год (365 суток), так как этот интервал хорошо соотносится с отчетным периодом по государственному заданию (рис. 2).

1. Стационарный пуассоновский (простейший) поток неоднородных событий

Поток заявок на экспертизу, направляемых Минобрнауки России по письмам граждан и официальным запросам организаций или органов государственной власти, представляет собой непрерывный на интервале наблюдения простейший (стационарный пуассоновский) неоднородный поток с известными на основании располагаемой статистики характеристиками.

Неоднородность такого потока очевидна в силу совершенно различных по количеству, качеству и глубине вопросов, на которые эксперту необходимо дать ответы при подготовке экспертных заключений, а также различному времени подготовки этих заключений. Интенсивность такого потока является постоянной величиной на всем интервале наблюдения (рис. 2, график $\lambda_1(t)$).

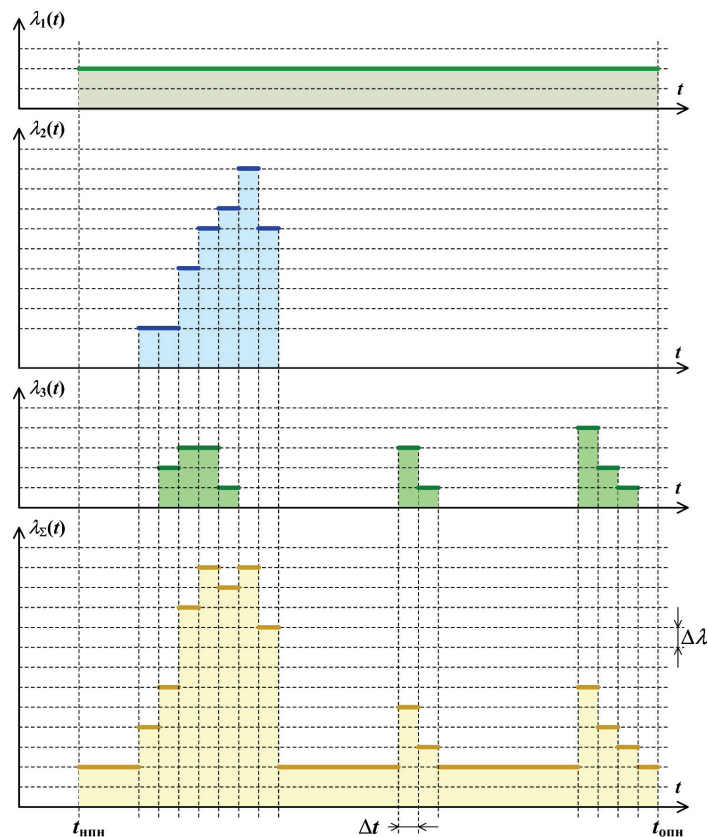


Рис. 2. Типовые потоки заявок на входе Реестра

II. Нестационарный пуассоновский поток

Поток такого типа является ординарным потоком без последствия, для которого в любой момент времени t существует конечный параметр $\lambda(t)$, зависящий от момента t .

Если функция $\lambda(t)$ заранее известна, и ее значение зависит только от времени t , то говорят о потоке с переменным детерминированным параметром, а при распределении функции $\lambda(t)$ по случайному закону — о потоке со случайным параметром.

Нестационарный пуассоновский поток задается вероятностью $P_i(t_0, \tau)$ поступления i вызовов за промежуток $(t_0, t_0 + \tau)$:

$$P_i(t_0, \tau) = \frac{[\lambda(t_0, \tau)]^i}{i!} e^{-\lambda(t_0, \tau)}, \quad (1)$$

Параметр $\lambda(t_0, \tau)$ представляет собой математическое ожидание числа вызовов в промежутке $(t_0, t_0 + \tau)$, а средняя интенсивность потока в этом промежутке равна $\lambda(t_0, \tau)/\tau$.

В общем случае, когда интенсивность нестационарного потока может принимать произвольные случайные значения, говорят о *дважды стохастическом пуассоновском потоке* (далее — ДСПП). На практике параметры входящего потока событий могут быть неизвестны, известны частично, либо меняться во времени по известному или случайному закону, что приводит в последнем случае к необходимости рассмотрения именно ДСПП [2].

ДСПП делятся на два основных класса:

- потоки, интенсивность которых является непрерывным случайным процессом;
- потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом дискретных состояний.

Потоки второго класса называют «цепями Маркова» или МС-потоками (МС — Markov chain). В таких системах переход из одного дискретного состояния в другое происходит скачком в детерминированные или случайные моменты времени. Моменты скачкообразного изменения интенсивности входного потока (состояния системы) могут иметь различную степень связи с моментами наступления событий (поступления заявок и пр.):

1) *синхронные потоки событий* — потоки, изменение интенсивности которых происходит в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий;

2) *асинхронные потоки событий* — потоки, изменение интенсивности которых происходит в случайные моменты времени, не зависящие от моментов наступления событий;

3) *полусинхронные потоки событий* — потоки, у которых для одного множества состояний справедливо определение первого типа, а для остальных состояний справедливо определение второго типа.

Если изменение интенсивности потока событий (смена дискретного состояния) возможно в произвольный случайный момент времени (шкала времени непрерывна), то такой процесс называется *процессом с непрерывным временем* [5].

Если же изменение интенсивности потока событий (смена дискретного состояния) может происходить в случайные, но дискретные моменты (дискретная шкала времени), то процесс является *процессом с дискретным временем*. В пределах интервала дискретности Δt интенсивность потока заявок постоянна (состояние не меняется), а ее изменение может происходить только в случайные моменты времени, кратные Δt .

Суммируя вышесказанное, можно заключить, что входящий поток заявок II-го типа можно рассматривать как *марковский случайный асинхронный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем*. Интенсивность такого потока аппроксимируется кусочно-постоянной функцией с интервалом дискретизации $\Delta \lambda$ и моментами смены состояний, кратными Δt . (рис. 2, график $\lambda_2(t)$).

К рассмотренному типу потоков можно отнести поток заявок на гранты Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых и по

государственной поддержке ведущих научных школ. Заявки поступают на экспертизу по формальным признакам в течение некоторого фиксированного периода времени, причем как правило с нарастанием интенсивности потока заявок по мере приближения к окончанию этого периода.

Продолжая рассмотрение ФРЭ в качестве примера Реестра, целесообразно ввести допущение, которое позволит упростить расчеты параметров входящего потока, а также последующее моделирование СМО. Примем интервал дискретности шкалы времени Δt , равный одним суткам (24 часа), а возможными моментами изменения интенсивности (дискретного состояния) – время 12.00 каждых суток.

III. Пуассоновский поток групповых заявок (обобщенный пуассоновский процесс)

Поток такого типа представляет собой неординарный пуассоновский поток, то есть стационарный поток, в котором вероятность поступления вызывающих моментов в промежуток t определяется распределением Пуассона, а в каждый вызывающий момент с вероятностью p_l поступает группа из $l=1, L$ одинаковых заявок [1], где l – случайная в общем случае величина, называемая *характеристикой неординарности потока* (рис. 3, график $l(t)$).

Общий параметр неординарного потока Пуассона рассчитывается по формуле

$$\lambda = \sum_{l=1}^L \lambda p_l \sum_{l=1}^L a_l, \quad (2)$$

где $a_l = \lambda p_l$ – параметр потока для групп размером l заявок, который можно трактовать, как интенсивность поступления вызывающих моментов с l заявок в каждом.

Интенсивность неординарного пуассоновского потока определяется выражением

$$\mu = \sum_{l=1}^L l \lambda p_l = \sum_{l=1}^L l a_l = \lambda M(l), \quad (3)$$

где $M(l) = \sum_{l=1}^L l p_l$ – математическое ожидание количества заявок в группе.

Мгновенная интенсивность потока (в отличие от параметра λ) относится не к отрезку времени поступления вызовов, а к вызывающему моменту.

Примерами потока такого типа могут послужить потоки групповых заявок, предварительно отобранных по формальным признакам и допущенных для проведения экспертизы «посуществу», в рамках Федеральных целевых программ «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» или «Развитие фармацевтической и медицинской промышленности Российской Федерации на период до 2020 года и дальнейшую перспективу». Отобранные заявки в случайные (в рамках некоторого интервала) моменты времени все вместе, одновременно поступают для проведения экспертизы. Количество заявок в группе (размер группы) также является случайной величиной, заключенной в некотором интервале.

Однако, следует оговориться, что после своего поступления на вход ФРЭ группа заявок распределяется между соответствующим ее размеру количеством каналов обслуживания (экспертами). Эта процедура не является мгновенной (в силу в том числе и человеческого фактора) и занимает некоторое время.

То есть на самом деле моменты поступления заявок из группы на обработку каналами будут распределены на некотором интервале времени τ , длительность которого очевидно будет зависеть от размера группы и наличия свободных каналов. Интенсивность нового, уже ординарного потока заявок в рамках интервала τ может также быть аппроксимирована ку-

сочно-постоянной функцией с интервалом дискретизации $\Delta\lambda$ и моментами смены состояний, кратными Δt (рис. 3, график $\lambda_3(t)$).

Такое допущение позволяет избежать необходимости расчета параметров неординарного исходного потока и считать, что на выходе буфера в этом случае будет также присутствовать поток II-го типа, то есть пуассоновский поток заявок с кусочно-постоянной интенсивностью (рис. 2, график $\lambda_3(t)$).

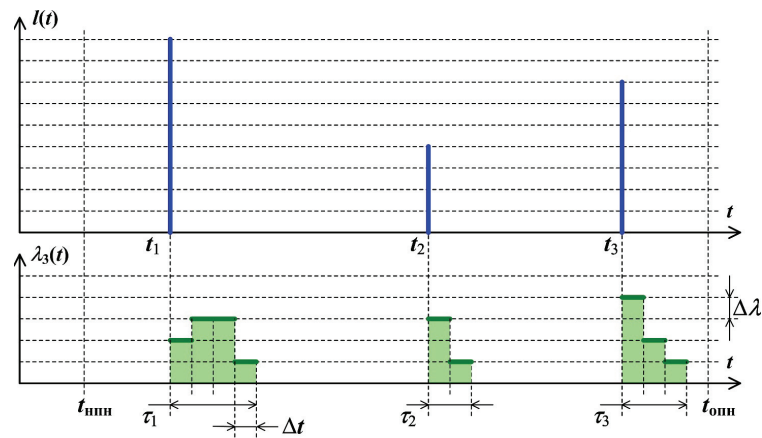


Рис. 3. Пуассоновский поток групповых заявок

IV. Суммарный поток

Над случайными процессами могут выполняться различные преобразования или операции, например, наложение (суммирование) двух и большего числа процессов, разделение (разрежение) по определенному закону и др. В этом отношении процесс Пуассона обладает замечательным свойством устойчивости (инвариантности) по отношению к ряду преобразований, то есть после таких преобразований процесс по-прежнему остается пуассоновским [9]. Более того, при определенных условиях он правильно описывает асимптотическое поведение многих других процессов. Данное утверждение правомерно в том числе и для нестационарных потоков Пуассона [3].

Объединение (сумма, суперпозиция) n независимых пуассоновских потоков с параметрами $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$ образует также пуассоновский поток с параметром

$$\lambda_{\Sigma}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t). \quad (4)$$

Вероятность поступления i вызовов за время t для объединенного потока будет определяться выражением

$$P_i(t) = \frac{[\lambda_{\Sigma}(t) \cdot t]^i}{i!} e^{-\lambda_{\Sigma}(t) \cdot t}. \quad (5)$$

Таким образом в нашем случае суммарный поток заявок на входе Реестра можно рассматривать как **марковский случайный асинхронный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем**, поскольку поток такого типа с учетом введенных допущений является обобщающим для всех рассмотренных выше типов потоков (рис. 3, график $\lambda_{\Sigma}(t)$).

5. Параметры потока заявок на входе Реестра

Для описания марковского случайного процесса с дискретными состояниями и дискретным временем необходима определенная совокупность параметров [10]:

- перечень состояний, в которых может находиться случайный процесс;
- дискретные моменты времени, в которые возможны изменения состояния случайного процесса;
- матрица условных вероятностей перехода случайного процесса между состояниями;
- векторы безусловных вероятностей состояний и начальных состояний случайного процесса.

Применительно к решаемой задаче, как было показано выше, рассматриваемый входящий поток событий можно представить как кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с n возможными состояниями: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$), где $\lambda(t)$ – интенсивность случайного потока. Считается, что момент времени t поток находится в i -м состоянии, если $\lambda(t) = \lambda_i$, ($i = \overline{1, n}$), причем изменения состояния потока возможны только в дискретные моменты времени с конечным шагом Δt : $t = k\Delta t$, ($k \in \mathbb{N}$, $t_0 = 0$). Эти моменты времени также называют «шагами» или «этапами» процесса.

Обозначим через $\lambda_i^{(k)}$ событие, состоящее в том, что после k шагов случайный процесс находится в состоянии λ_i . При любом $k \in \mathbb{N}$ события $[\lambda_i^{(k)}]$, ($i = \overline{1, n}$) образуют полную группу и несовместны. Напомним, что для каждого шага марковской цепи вероятность перехода из произвольного состояния $\lambda_i^{(k)}$ в произвольное состояние $\lambda_j^{(k)}$ не зависит от того, когда и каким образом процесс пришел в состояние $\lambda_i^{(k)}$.

Для каждого шага $k \in \mathbb{N}$ (т.е. момента времени $t = k\Delta t$) существуют определенные вероятности перехода процесса за один шаг из текущего состояния в любое другое.

Некоторые из этих вероятностей могут быть равны нулю, если непосредственный переход за один шаг невозможен. Кроме того, существует вероятность задержки процесса в текущем состоянии. Переходные вероятности $p_{ij}^{(k)}$ можно записать как условные вероятности сложных событий

$$p_{ij}^{(k)} = P(\lambda_j^{(k)} | \lambda_i^{(k-1)}), (i, j = \overline{1, n}), \quad (6)$$

то есть вероятность того, что процесс на k -м шаге в момент времени $k\Delta t$ перейдет в состояние λ_j при условии, что в момент $(k-1)\Delta t$ он находился в состоянии λ_i .

Совокупность переходных вероятностей $p_{ij}^{(k)}$ образует стохастическую квадратную матрицу условных вероятностей перехода случайного процесса между состояниями

$$P_{\Pi}^{(k)} = \|p_{ij}^{(k)}\|, (i, j = \overline{1, n}), k \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

причем

$$0 \leq p_{ij}^{(k)} \leq 1, \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(k)} = 1, (i, j = \overline{1, n}), k \in \mathbb{N}.$$

Если вероятности перехода не зависят от времени (номера шага), то марковская цепь называется *однородной*, иначе – *неоднородной*.

В силу отсутствия особых оснований, будем полагать, что рассматриваемый входящий поток может быть аппроксимирован с помощью однородной марковской цепи. В этом случае матрица условных вероятностей перехода примет вид

$$P_{\Pi} = \|p_{ij}\|, (i, j = \overline{1, n}). \quad (8)$$

Для нахождения вектора безусловных вероятностей состояний случайного процесса $P^{(k)} = [p_i^{(k)}]$, $i = \overline{1, n}$ предварительно должен быть задан вектор безусловных вероятностей начальных состояний $P^{(0)}$.

Безусловные вероятности состояний комплекса $p_i^{(k)}$ после k -го шага могут быть определены по формуле полной вероятности, описываемой рекуррентным соотношением

$$p_j^{(k)} = \sum_{i=1}^n p_i^{(k-1)} p_{ij}, (j = \overline{1, n}), \quad (9)$$

где $p_i^{(k-1)}$ – безусловные вероятности состояний процесса после $(k-1)$ -го шага, выступающие в роли вероятностей гипотез.

В соответствии с формулой (9) вектор безусловных вероятностей состояний потока после k -го шага будет определяться выражением

$$[P^{(k)}]^\tau = [P^{(k-1)}]^\tau P_\Pi. \quad (10)$$

Тогда в переводе к начальным условиям вектор состояний процесса на k -м шаге можно определить из матричного уравнения

$$[P^{(k)}]^\tau = [P^{(0)}]^\tau (P_\Pi)^k. \quad (11)$$

Вектор состояний является одной из основных характеристик марковского случайного процесса, на основе которого, могут быть рассчитаны представляющие интерес характеристики реальных СМО.

Выводы

Таким образом, на основании изложенного можно сделать ряд важных выводов.

1. Реестр экспертов можно рассматривать как многоканальную разнородную многофазную замкнутую СМО с ограниченным ожиданием и смешанными приоритетами.
2. Поток заявок на входе Реестра представляет собой однородный марковский случайный асинхронный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем (марковскую цепь).
3. Параметры потока заявок на входе Реестра могут быть рассчитаны с использованием известного математического аппарата.

Статья подготовлена по материалам научно-исследовательской работы, выполненной ФГБНУ НИИ РИНКЦЭ по заданию № 2.12620.2018/12.1 Министерства образования и науки РФ на выполнение работ в рамках государственного задания в сфере научной деятельности.

Список литературы

1. Абилов А.В. Теория телетрафика. Курс лекций [Электронный ресурс] // Ижевский государственный технический университет [Официальный сайт]. Available at: <http://old.istu.ru/files/material-static/1755/tt-lect-02.pdf> (дата обращения: 10.03.2018).
2. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-потоков и МАР-потоков событий, Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, № 1(14), 2011, С. 13–21.
3. Григелионис Б.И. О сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому // Теория вероятностей и ее применения. 1963. Т. 8, № 2. С. 189–194.
4. Коваленко И.Р. Теория массового обслуживания. Итоги науки. Сер. Теория вероятностей. 1963, ВИНТИ, М., 1965, С. 73–125.

5. Ласуков В.В. Лекции по математической статистике: учебное пособие / Томский политехнический университет. Томск: Изд-во ТПУ, 2004, 104 с.
6. Мельник П.Б. Математическая постановка задачи формирования реестра экспертов // Инноватика и экспертиза. Научные труды ФГБНУ НИИ РИНКЦЭ. № 2 (13), 2014. С. 69–81.
7. Петухин В.А. Компьютерное моделирование. Курс лекций [Электронный ресурс]. Available at: <https://ek-ek.jimdo.com/петухин/моделирование> (дата обращения: 13.02.2018).
8. Саакян Г.Р. Теория массового обслуживания. Лекции для студентов экономических специальностей очной, заочной и дистанционной форм обучения. Шахты, Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса (ЮРГУЭС). 2006.
9. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М. Советское радио, 1977, 557 с.
10. Ярлыков М.С., Богачев А.С., Миронов М.А. Боевое применение и эффективность авиационных комплексов / Под ред. М.С. Ярлыкова. М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1990.

References

1. Abilov A.V. *Teoriya teletrafika* [Teletraffic theory] *Kurs lektsiy* [Lecture course] *Kalashnikov Izhevsk State Technical University* [Official website]. Electronic resource. Available at: <http://old.istu.ru/files/material-static/1755/tt-lezct-02.pdf> (date of circulation: 03/10/2018).
2. Gorcev A.M., Nezhelskaya L.A. (2011) *O svyazi MS-potokov i MAR-potokov sobytiy*, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta* [On the connection of MC-flows and MAP-flows of events, Bulletin of Tomsk State University] *Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Management, Computer Science and Informatics]. No. 1(14), pp. 13–21.
3. Grigelionis B.I. (1963) *O skhodimosti summ stupenchatykh sluchaynykh protsessov k puassonovskomu* [On the convergence of sums of stepwise random processes to a Poisson one] *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya* [Theory of Probability and its Applications]. Vol. 8, No. 2. pp. 189–194.
4. Kovalenko I.R. (1963) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queuing theory] *Itogi nauki. Ser. Teoriya veroyatnostey. VINITI* [The results of science. Ser. Probability theory. VINITI]. Moscow, 1965, pp. 73–125.
5. Lasukov V.V. (2004) *Lektsii po matematicheskoy statistike: uchebnoe posobie* [Lectures on mathematical statistics: a textbook] *Tomskiy politekhnicheskii universitet: Izd-vo TPU* [Tomsk Polytechnic University. Publishing house TPU]. Tomsk. 104 p.
6. Melnik P.B. (2014) *Matematicheskaya postanovka zadachi formirovaniya reestra ekspertov* [Mathematical Statement of the Problem of Forming the Roster of Experts] *Innovatika i ekspertiza. Nauchnye trudy FGBNU NII RINKTsE* [Innovation and Expert Examination. Scientific works of the SRI FRCEC]. Moscow. No. 2(13), pp. 69–81.
7. Petukhin V.A. *Komp'yuternoe modelirovanie* [Computer modeling] *Kurs lektsiy* [Lecture course]. Electronic resource. Available at: <https://ek-ek.jimdo.com/петухин/моделирование> (date of circulation: 13.02.2018).
8. Sahakyan G.R. (2006) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queuing theory] *Lektsii dlya studentov ekonomicheskikh spetsial'nostey ochnoy, zaочноy i distantsionnoy form obucheniya* [Lectures for students of economic specialties in full-time, correspondence and distance learning] *Yuzhno-Rossiyskiy gosudarstvennyy universitet ekonomiki i servisa (YuRGUES)* [South-Russian State University of Economics and Service (SSSU)]. Shakhty.
9. Tikhonov V.I., Mironov M.A. (1977) *Markovskie protsessy* [Markov processes] *Sovetskoe radio* [Soviet radio]. Moscow, p. 557.
10. Yarlykov M.S., Bogachev A.S., Mironov M.A. (1990) *Boevoe primeneniye i effektivnost' aviatsionnykh kompleksov. Pod red. M.S. Yarlykova* [Combat application and efficiency of aviation systems and complexes. Ed. M.S. Yarlykova] *VVIA im. prof. N.E. Zhukovskogo* [Military-air Engineering Academy named after Professor N.E. Zhukovsky]. Moscow.