ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ ДЛЯ АНАЛИЗА ОБОБЩЕННОГО НОНИУСНОГО МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ

В.Л. Чураков, науч. сотр. ФГБУН Удмуртский ФИЦ УрО РАН, канд. техн. наук, *v.l.churakov@mail.ru*
С.П. Юркевичюс, нач. отд. ФГБНУ НИИ РИНКЦЭ, канд. техн. наук, доц., *jursp@extech.ru*
А.Е. Гриценко, зам. нач. отд. ФГБНУ НИИ РИНКЦЭ, канд. техн. наук, *gritsenkoae@extech.ru*

Рецензент: С.В. Стрельников, АО Научно-исследовательский институт точных приборов, д-р техн. наук, *orionsvs@mail.ru*

Предложен новый вид цепной дроби — разностная цепная дробь. Доказан ряд теорем, устанавливающих порядок разложения числа в разностную цепную дробь и утверждающих единственность такого разложения. Установлена связь элементов разностной цепной дроби с математическим описанием обобщенного нониусного метода измерения временных интервалов.

Ключевые слова: временной интервал, фаза, нониусный генератор, нониусный метод, алгоритм.

APPLICATION OF NUMBER THEORY FOR ANALYSIS OF GENERALIZED NONIUS METHOD OF TIME INTERVAL MEASUREMENT

V.L. Churakov, Researcher FSBI Udmurt Federal Research Center Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Engineering, *v.l.churakov@mail.ru*
S.P. Yurkevichyus, Head of Department, SRI FRCEC, Doctor of Engineering, Assistant Professor, *jursp@extech.ru*
A.E. Gritsenko, Deputy Head of Department, SRI FRCEC, Doctor of Engineering, *gritsenkoae@extech.ru*

A new type of chain fraction — difference chain fraction — is proposed. A number of theorems establishing the order of decomposition of a number into a difference chain fraction and asserting the uniqueness of such decomposition are proved. The connection between the elements of the difference chain fraction and the mathematical description of the generalized nonius method of time interval measurement is established.

Keywords: time interval, phase, nonius generator, nonius method, algorithm.

Теорема 1. Если α, b, q, r — положительные целые числа, удовлетворяющие равенству $\alpha = bq - r$, то α, b и b, r имеют один и тот же наибольший общий делитель. Теорема 1 аналогична теореме 36 [2] и имеет сходное с ней доказательство.

Теорема 2. Для целых положительных чисел a и b, у которых b — не делитель α, при некотором s существуют целые положительные числа: q_0, q_1, q_2, …, q_s и r_1, r_2, r_3, …, r_s, такие, что $b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_s > 0$.

$$\alpha = bq_0 - r_1, \quad r_s - 2 = r_{s-1}q_{s-1} - r_s,$$

$$b = r_1q_1 - r_2, \quad r_s - 1 = r_sq_s,$$

$r_1 = r_2 q_2 - r_3$

. . . .

При этом r_s есть наибольший общий делитель a и b. Доказательство этой теоремы базируется на многократном последовательном применении теоремы 1. Процесс повторения этих равенств не может быть бесконечным, так как тогда существовало бы бесконечное множество различных целых чисел, лежащих между 0 и b.

Определение 1. Конечной разностной цепной дробью называется число, записанное в виде:

$$A_n = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\ddots \; a_{s-1} - \cfrac{1}{\alpha_s}}}}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_s$, – целые числа, при этом $\alpha_0 \geq 1, \alpha_1 > 1, \ldots, \alpha_s > 1$.

Теорема 3. Любое рациональное число может быть представлено в виде конечной разностной цепной дроби. Используя равенства теоремы 2, рациональное число P/Q определяем последовательностью уравнений

$$\frac{P}{Q} = \alpha_0 - \frac{1}{\left(\frac{Q}{r_1}\right)}; \quad \frac{Q}{r_1} = \alpha_1 - \frac{1}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}; \quad \ldots \quad \frac{r_{s-2}}{r_{s-1}} = \alpha_{s-1} - \frac{1}{\left(\frac{r_{s-1}}{r_s}\right)}; \quad \frac{r_{s-1}}{r_s} = \alpha_s,$$

откуда получаем конечную разностную цепную дробь.

Теорема 4. Существует одна и только одна конечная разностная цепная дробь, равная данному рациональному числу. Теорема доказывается методом «от противного», т. е. предполагается существование двух различных конечных разностных цепных дробей, равных рациональному числу, а затем показывается равенство элементов этих дробей. По аналогии с известными цепными дробями [2] теоремы 3 и 4 распространяются на действительные числа. В этом случае можно доказать, что любое действительное число можно представить одной и только одной бесконечной разностной цепной дробью.

Определение 2. Подходящей n-й дробью ($0 \leq n \leq s$) к конечной разностной цепной дроби будем называть величину

$$A_n = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 \; \ddots \; a_{n-1} - \cfrac{1}{p_s}}}$$

Теорема 5. Если a_0, a_1, …, a_s, — элементы разностной цепной дроби, то последовательность чисел P_n и Q_n имеет вид: $P_n = P_{n\text{-}1}\alpha_n - P_{n-2}$, $Q_n = Q_{n-1}\ \alpha_n - Q_{n-2}$ при начальных условиях $P_0 = \alpha_0$, $Q_0 = 1$, $P_1 = \alpha_0\alpha_1 - 1$; $Q_1 = \alpha_1$ удовлетворяют соотношению $A_n = P_n/Q_n$. Доказательство теоремы проводится методом полной математической индукции.

Теорема 6. При n = 1, 2, ..., s выполняется равенство:

$$Q_n P_{n-1} - P_n Q_{n-1} = 1.$$

Теорема также доказывается методом математической индукции. Полученное равенство используется при выводе последующих формул.

Сопоставим результаты доказанных выше теорем с уравнениями (12), характеризующими обобщенный нониусный метод [1] измерения временных интервалов. Не нарушая общности дальнейших выводов, будем считать α_0 рациональным числом, следовательно, $\alpha_0 = A/B$, где A и B — целые числа. Сделав такую подстановку в уравнение (12) из [1], получим:

$$B = Ap_0 - \alpha_1 B,\ \alpha_1 B < A;$$

$$A = \alpha_1 Bp_1 - \alpha_2 B,\ \alpha_2 B < \alpha_1 B;$$

$$\alpha_1 B = \alpha_2 Bp_2 - \alpha_3 B,\ \alpha_3 B < \alpha_2 B$$

. . . .

В первом уравнении числа B и Ap_0 – целые, значит, $\alpha_1 B$ – целое число. Во втором уравнении A и $\alpha_i Bp_1$ – целые числа, поэтому $a_2 B$ – также целое число. Продолжая такие рассуждения, можно доказать, что все элементы этих уравнений есть целые числа.

Полученная система уравнений согласно теоремам 2 и 3 есть разложение в цепную разностную дробь числа $B/A = 1/\alpha_0$ [1]. Следовательно, можно установить следующие соотношения: $\alpha_0 = p_0$, $\alpha_1 = p_1$, $\alpha_2 = p_2$, $r_1 = \alpha_1 B$, $r_2 = \alpha_2 B$, $r_3 = \alpha_3 B$, отсюда $a_1 = r_1/B$, $a_2 = r_2/B$, $a_3 = r_3/B$.

Разложение в разностную цепную дробь числа $1/a_0$ имеет вид:

$$\frac{1}{\alpha_0} = p_0 - \cfrac{1}{p_1 - \cfrac{1}{p_2 \cdot \atop {\ddots \atop p_{s-1} - \cfrac{1}{p_s}}}}$$

Таким образом, элементы разностной цепной дроби имеют следующий физический смысл: p_0 – количество периодов нониусного генератора в цикле первого порядка; p_i – число циклов первого порядка в цикле второго порядка; p_2 – число циклов второго порядка в цикле третьего порядка и т. д. Большой интерес представляет получение общих формул для оценки величин 1, 2, …, α_s сдвига фаз генераторов по окончании циклов любого порядка. Для этого будем считать число $1/\alpha_0$ равным n-й подходящей дроби $1/\alpha_0 = P_n/Q_n$, так как коэффициент пропорциональности двух генераторов определяется как рациональное число.

Теорема 7. Если число B/A разложено в конечную разностную цепную дробь (1), в которой

$$B = A\alpha_0 - r_1,\ r_{n-2} = r_{n-1}\alpha_{n-1} - r_n,$$

$$A = r_1\alpha_1 - r_2,\ r_n - 1 = r_n\alpha_n,$$

$$r_1 = r_2\alpha_2 - r_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

то величины r_m/B при $1 \le m \le n$ определяются соотношением:

$$\frac{r_m}{B} = \frac{Q_n P_{m-1} - P_n Q_{m-1}}{P_n}.$$

Теорема доказывается методом математической индукции. В качестве следствия этой теоремы получаем формулу для оценки минимального сдвига фаз, создаваемого циклом n-го порядка $r_n/B = 1/P_n$, определяя таким образом максимальную точность измерения, которую можно получить при данном приближении коэффициента пропорциональности между периодами генераторов рациональным числом.

Теперь рассмотрим вопрос достижения заданной точности измерения при использовании циклов не выше m-го порядка. Пусть точность измерения должна быть не хуже ε части периода основного генератора. Тогда, исходя из теоремы 7, следует:

$$\frac{r_m}{B} \le \frac{Q_n P_{m-1} - P_n Q_{m-1}}{P_n} \le \varepsilon,$$

откуда

$$-\frac{P_n}{Q_n} \ge \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1} + \varepsilon}. \qquad (2)$$

Последнее неравенство истолковывается следующим образом. Для того чтобы величина r_m/B не превосходила ε, необходимо и достаточно, чтобы n-я и $(m - 1)$-я подходящие дроби удовлетворяли неравенству (2). Следующим важнейшим параметром устройств, построенных на базе обобщенного нониусного метода, является быстродействие, под которым понимается время, необходимое для проведения одного измерения. В общем случае это время зависит от длительности временного интервала, но для оценки быстродействия устройства определяется максимально возможное время измерения на данном шаге уточнения, т. е. продолжительность процесса измерения, содержащего максимальное количество циклов всех используемых порядков.

Теорема 8. Количество периодов нониусного генератора, содержащихся в максимально возможном количестве циклов n-го порядка, равно P_n. Теорема доказывается методом математической индукции. Процесс измерения длительности временного интервала в худшем случае содержит максимальное количество циклов всех порядков до n-го включительно, поэтому количество периодов нониусного генератора

$$N = \sum_{i=0}^{n} P_i.$$

Максимальное время измерения при использовании циклов до n-го порядка:

$$T_{\text{изм}} = t_x + T_2 \sum_{i=0}^{n} P_i. \tag{4}$$

где t_x – длительность измеряемого временного интервала; T_2 – период нониусного генератора.

Результаты анализа позволяют найти критерии выбора коэффициента пропорциональности между периодами основного и нониусного генераторов для обеспечения заданной точности измерения с использованием циклов не выше определенного порядка и получить максимальное быстродействие измерительных устройств. Математически задача состоит в минимизации выражения (3) при ограничивающем условии, которое накладывается соотношением (2). Проведенные авторами исследования показали, что решение поставленной задачи достигается при минимальных и примерно равных значениях $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ элементов разностной цепной дроби числа $1/\alpha_0$, при которых удовлетворяется соотношение (2).

Статья выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках Государственного задания 2024 г. № 075-00698-24-03.

Список литературы

1. Чураков В.Л., Юркевичюс С.П., Гриценко А.Е. Измерение временных интервалов с использованием обобщенного нониусного метода. М.: Инноватика и экспертиза, 2024. 92 с.

2. Бухштаб А.А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966.

References

1. Churakov V.L., Jurkevicius S.P., Gritsenko A.E. (2042) *Izmerenie vremennykh intervalov s ispol'zovaniem obobshchennogo noniusnogo metoda* [Time interval measurement using generalized nonius method] *Innovatika i ekspertiza* [Innovation and Expert Examination]. Moscow. 92 p.

2. Bukhshtab A.A. (1966) *Teoriya chisel* [Theory of Numbers] *Prosveshcheniy* [Prosveshchenie]. Moscow.